JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 8, 249–261 (1973)

Prolongement Extrémal de Fonctions Différentiables d'une Variable

G. GLAESER

Department of Mathematics, Université Louis Pasteur, 67084 Strasbourg Cedex, France

Communicated by I. J. Schoenberg

DEDIÉ AU PROFESSEUR I. J. SCHOENBERG À L'OCCASION DE SON $70^{\text{ÈME}}$ ANNIVERSAIRE

1. RAPPEL SUR LE THÉORÈME DE WHITNEY

Soit $\mathbb{K}$ un pavé compact de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ un sous-espace compact; $\mathscr{P}^m(R^n)$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels, à n indéterminées, de degré $\leqslant m$.

Un champ de polynômes (d'ordre m) $A \mapsto P_A$ défini sur $\mathbb{F}$ est une application de $\mathbb{F}$ dans $\mathscr{P}^m(R^n)$.

Par exemple, étant donnée une fonction de classe C^m, définie sur $\mathbb{K}$, associons à chaque point $A \in \mathbb{F}$ le polynôme de Taylor $T_A f$ de f, en A, d'ordre $\leqslant m$. L'application $A \mapsto T_A f$ s'appelle le champ de polynômes induit par f sur $\mathbb{F}$.

Inversement, on peut se demander à quelles conditions un champ de polynômes $A \mapsto P_A$ est induit par une fonction de classe C^m. On dira alors que P_A est *prolongeable* en une fonction de classe C^m, ou encore que le champ P_A est *taylorien.*

THÉORÈME (cf. Whitney [10] ou Glaeser [3]). *Une condition nécessaire et suffisante pour que le champ $A \mapsto P_A$ soit taylorien est qu'il existe un module de continuité (concave) ω tel que les inégalités suivantes soient vérifiées, pour tout couple $(A, B) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$. ($\|\cdot\|$ désigne la distance euclidienne, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est un multi-indice tel que $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n < m$)*

$$(W_k)\ |D^k P_A(B) - D^k P_B(B)| < \|AB\|^{m-|k|} \cdot \omega(\|AB\|).$$

L'espace des champs tayloriens d'ordre m, défini sur $\mathbb{F}$, est *l'algèbre de Whitney*, $\mathbb{W}^m(\mathbb{F})$, que l'on peut identifier au quotient de l'espace des fonctions m-fois continûment dérivables $C^m(\mathbb{K})$ par l'idéal $J^m(\mathbb{F})$ des fonctions m-plates sur $\mathbb{F}$. On peut munir $\mathbb{W}^m(\mathbb{F})$ de la norme du quotient $C^m(\mathbb{K})/J^m(\mathbb{F})$, pour laquelle c'est un espace complet: la norme d'un champ taylorien $\dot{P}$ est égale à la borne inférieure des normes (au sens de $C^m(\mathbb{K})$ des prolongements $\hat{P}$ de $\dot{P}$).

Le calcul de la norme de $\dot{P}$ nécessiterait donc que l'on sache prolonger le champ taylorien P.

Mais il existe d'autres normes sur $\mathbb{W}^m(\mathbb{F})$, équivalentes à la norme quotient, qui peuvent se calculer en utilisant uniquement les valeurs de $\dot{P}$ sur $\mathbb{F}$, indépendamment de tout prolongement (cf. Glaeser [3] où une telle norme est notée $||| \cdot |||_{\mathbb{F}}$, et Coatmelec [1]).

THÉORÈME (cf. Glaeser [3]). *Il existe deux constantes Γ_1 et Γ_2 ne dépendant que de $\mathbb{K}$, de n et m, telles que tout champ taylorien $\dot{P}$ admette un prolongement $\hat{P}$ (obtenu à l'aide d'un prolongateur linéaire continu) tel que*:

$$\| \hat{P} \|_{\mathbb{K}}^{m} < \Gamma_1 ||| \dot{P} |||_{\mathbb{K}}^{m} \tag{1}$$

et que si le module de continuité qui figure dans les formules (W_k) est ω, les dérivées partielles m-ième de $\hat{P}$ admettent $\Gamma_2 \cdot \omega$ comme module de continuité.

2. POSITION DU PROBLÈME

On n'a malheureusement aucune idée de l'ordre de grandeur des constantes Γ_1 et Γ_2, ce qui est fâcheux du point de vue de l'analyse numérique.

On se propose donc de trouver une autre norme sur $W^m(\mathbb{F})$ que nous noterons $))\cdot((_{\mathbb{F}}^{m}$ et qui satisfera aux deux conditions suivantes:

(a) $))\dot{P}((_{\mathbb{F}}^{m}$ se calculera en utilisant uniquement les valeurs de P et de ses dérivées sur $\mathbb{F}$, préalablement à tout prolongement.

(b) La formule (1) est remplacée par:

$$))\hat{P}((_{\mathbb{K}}^{m} \leqslant 3(m+1)^2\,))\dot{P}((_{\mathbb{F}}^{m} \tag{2}$$

Les constantes qui jouent le même rôle que Γ_1 et Γ_2 sont égales à $3(m+1)^2$ toutes les deux.

Nous résolvons ce problème dans le cas des *fonctions d'une variable*.

La découverte de la définition de $))\cdot((_{\mathbb{F}}^{m}$, résulte d'une étude fine du cas où $\mathbb{F}$ se réduit à deux points a et b, complètant un article de Favard [2].

Insistons sur le fait que le présent travail n'aurait probablement pas pu être poussé, si chaque conjecture n'avait pas été examinée *expérimentalement*, grâce à des essais numériques effectués au laboratoire de Calcul

Numérique (cf. Louboutin [6]), avant d'être démontrée. Les ordinateurs électroniques permettent de "faire des figures," aptes à guider l'intuition, dans des cas (dépendants de trop de paramètres) où le dessin dans $\mathbb{R}^2$ ne suffit pas.

3. Le problème d'interpolation extrêmale de Favard

Étant donnés deux nombres réels a et b ($a < b$) et un ensemble de deux polynômes $\dot{P} = \{P_a, P_b\}$ de degré $\leqslant m$, il existe de nombreuses fonctions f de classe C^m et admettant en outre une dérivée $m + 1$ appartenant à $L^\infty[a, b]$ (nous dirons que $f \in C_\infty^m[a, b]$) telles que:

$$T_a f = P_a \qquad \text{et} \qquad T_b f = P_b . \tag{3}$$

On se propose de résoudre le problème d'interpolation (3) de façon à rendre minimale la norme $\|f^{(m+1)}\|_{L^\infty}$.

Ce problème a été étudié par Favard [2]: notre problème est plus particulier, car nous n'envisageons que deux nœuds d'interpolation $\{a\}$ et $\{b\}$, mais, en revanche, notre exposé prétend élucider des aspects qui n'apparaissent pas explicitement dans l'article cité.

La solution s'obtient sous forme de *splines* à nœuds non imposés. Le problème est susceptible d'un traitement sur ordinateur (cf. Louboutin [6]).

Variante de la formule de Taylor

Si $f \in C_\infty^m[a, b]$ on peut écrire:

$$T_b f(x) - T_a f(x) = \int_a^b \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)\, dt \tag{4}$$

et aussi:

$$T_b^k f(x) - T_a^k f(x) = \int_a^b \frac{(x-t)^{m-k}}{(m-k)!} f^{(m+1)}(t)\, dt \tag{5}$$

où $T_b^k f$ désigne le polynôme de Taylor de degré $(m - k)$ de $f^{(k)}(x)$ au point b.

La relation (4) montre que la donnée d'une fonction $\varphi \in L^\infty[a, b]$ ne détermine le champ taylorien biponctuel $\{T_b f, T_a f\}$($f \in C_\infty^m[a, b]$ telle que $f^{(m+1)}(t) = \varphi(t)$) qu'à un polynôme de degré m près, c'est-à-dire que φ détermine l'élément associé à $(T_b f, T_a f)$ dans le quotient

$$\tilde{W}^m\{a, b\} \approx \mathscr{P}^m(\mathbb{R}) \times \mathscr{P}^m(\mathbb{R})/\varDelta$$

où $\varDelta$ désigne la diagonale, c'est-à-dire l'espace des couples de polynômes égaux.

$\tilde{W}^m\{a, b\}$ est un espace vectoriel de dimension $m+1$ dont tout élément admet un représentant de la forme $(0, P)$, qui sera noté P.

Son dual $(\tilde{W}^m\{a, b\})'$ est un espace vectoriel de dimension $m+1$, donc isomorphe à $\mathscr{P}^m(R)$. Le théorème suivant décrit explicitement un tel isomorphisme.

THÉORÈME. *A toute forme linéaire* $\mathbf{L}$ *de* $(W^m\{a, b\})'$ *on peut associer bijectivement un polynôme* $\tilde{L}(t) \in \mathscr{P}^m(\mathbb{R})$ *tel que si* $P \in W^m\{a, b\}$ *on ait*:

$$\langle \mathbf{L}, P\rangle = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \tilde{L}^{(i)}(b)\, P^{(m-i)}(b). \tag{6}$$

Démonstration. L'application Φ:

$$\mathscr{P}^m(\mathbb{R}) \to (\tilde{W}^m\{a, b\})'$$

$$\tilde{L} \mapsto \left[\mathbf{L} : P \mapsto \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \tilde{L}^{(i)}(b)\, P^{(m-i)}(b)\right]$$

est linéaire et injective puisque si $\mathbf{L} = 0$ on voit en choisissant $P_i(t) = ((t-b)^{m-i}/(m-i))$ que

$$\tilde{L}^{(i)}(b) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, 1,..., m \qquad \text{et donc} \quad \tilde{L}(t) = 0.$$

Φ est donc un isomorphisme puisque les deux espaces ont la même dimension.

COROLLAIRE. *Si* $f \in C_\infty{}^m[a, b]$ *et* $\tilde{L} \in (\tilde{W}^m\{a, b\})'$ *on a*:

$$\langle \mathbf{L}, T_b f - T_a f\rangle = \int_a^b \tilde{L}(t)\, f^{(m+1)}(t)\, dt \qquad \textit{ou} \quad \mathbf{L} = \Phi(\tilde{L}). \tag{7}$$

Démonstration.

$$\langle \mathbf{L}, T_b f - T_a f\rangle = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \tilde{L}^{(i)}(b)[T_b^{(m-i)} f(b) - T_a^{m-i} f(b)].$$

Mais la relation (5) s'écrit:

$$T_b^{m-i} f(b) - T_a^{m-i} f(b) = \int_a^b \frac{(b-t)^i}{i!} f^{(m+1)}(t)\, dt$$

et donc:

$$\langle \mathbf{L}, T_b f - T_a f\rangle = \int_a^b f^{(m+1)}(t) \left[\sum_{i=0}^{m} \tilde{L}^{(i)}(b) \frac{(t-b)^i}{i!}\right] dt$$

$$= \int_a^b f^{(m+1)}(t)\, \tilde{L}(t)\, dt.$$

Problème de Favard

On munit $(\tilde{W}^m\{a, b\})'$ de la norme suivante: si $\mathbf{L} \in (\tilde{W}^m\{a, b\})'$ on pose:

$$\|\mathbf{L}\|_{a,b} = \frac{1}{b-a} \int_a^b |\tilde{L}(t)|\, dt.$$

Si $f \in C_\infty{}^m[a, b]$ est un prolongement quelconque du champ taylorien donné $\dot{P} = \{P_a, P_b\}$ l'inégalité de Hölder et la relation (7) permettent d'écrire:

$$|\langle \mathbf{L}, P_b - P_a\rangle| \leqslant (b-a) \|\mathbf{L}\|_{a,b} \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty[a,b]}. \tag{8}$$

Sur $\tilde{W}^m\{a, b\}$ la norme duale de la précédente est définie par: si $\pi(\dot{P}) \in W^m\{a, b\}$ (on note π la projection de $W^m\{a, b\}$ sur $\tilde{W}^m\{a, b\}$)

$$))\pi(\dot{P})((^m_{a,b} = \sup_{\|L\|_{a,b}=1} |\langle \mathbf{L}, P_b - P_a\rangle|. \tag{9}$$

La sphère $\|\mathbf{L}\|_{a,b} = 1$ est l'ensemble compact des vecteurs de norme 1 d'un espace vectoriel de dimension finie par suite si $\dot{P}$ est donné il existe au moins un $\mathbf{L}_0 \in (W^m\{a, b\})'$ tel que

$$\|\mathbf{L}_0\|_{a,b} = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle \mathbf{L}_0, P_b - P_a\rangle =))\pi(\dot{P})((^m_{a,b}$$

(il peut effectivement en exister plusieurs, cf. Louboutin [6, chapitre III]).

Pour tout prolongement $f \in C_\infty{}^m[a, b]$ de $\dot{P}$ on aura alors:

$$))\pi(\dot{P})((^m_{a,b} \leqslant \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty[a,b]} \cdot (b-a). \tag{10}$$

Montrons que (10) n'est une égalité que pour une *seule* fonction $f \in C^m[a, b]$, qui résoudra ainsi le problème posé.

Pour cela on utilise le lemme.

LEMME. *Par chaque point* $\mathbf{\Lambda}_0$ *de la sphère unité de* $(W^m\{a, b\})'$ *ne passe qu'un seul hyperplan d'appui qui est l'ensemble des* $\mathbf{\Lambda}$ *tels que*:

$$\int_a^b \tilde{\Lambda}(t)\, \psi(t)\, dt = b - a \qquad \text{où} \quad \psi(t) = \operatorname{sgn} \tilde{\Lambda}_0(t). \tag{11}$$

Démonstration. L'égalité (11) définit bien un hyperplan contenant $\mathbf{\Lambda}_0$ puisque

$$\int_a^b \tilde{\Lambda}_0(t)\, \psi(t)\, dt = \int_a^b |\tilde{\Lambda}_0(t)|\, dt = \|\mathbf{\Lambda}_0\|_{a,b} (b-a) = b - a.$$

C'est un hyperplan d'appui car d'après l'inégalité de Hölder

$$b - a \leqslant \int_a^b |\tilde{\Lambda}(t)|\, dt = (b - a) \,\|\, \mathbf{\Lambda} \,\|_{a,b} \qquad \text{et donc} \quad \|\, \mathbf{\Lambda} \,\|_{a,b} \geqslant 1.$$

L'unicité provient du fait que $\tilde{\Lambda}_0(t)$ étant un polynôme non nul l'ensemble de ses zéros est fini et la fonction sgn $\tilde{\Lambda}_0(t)$ est la seule fonction $\psi \in L^\infty[a, b]$ telle que

$$\|\, \psi \,\|_{L^\infty[a,b]} = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \tilde{\Lambda}_0(t)\, \psi(t) = \int_a^b |\tilde{\Lambda}_0(t)|\, dt.$$

Remarque. Un ensemble convexe est dit "lisse" si chaque point extrêmal n'est contenu que dans un seul hyperplan d'appui: un polyèdre n'est jamais lisse: il comprend des pointes. Un cylindre circulaire droit complété par deux demi-boules est lisse). La propriété essentielle de la norme $))\cdot((^m_{a,b}$, qui assure le succès de la méthode, est de fournir une boule unité lisse.

DÉFINITIONS. On appelle *spline* de degré m et d'ordre k une fonction de $C_\infty{}^m[a, b]$ dont la dérivée $(m + 1)$ième est une fonction étagée présentant exactement k discontinuités dans l'intervalle $]a, b[$ (cf. Schoenberg [9]).

Une *spline parfaite* est une spline dont l'ordre est inférieur ou égal au degré et dont la dérivée $(m + 1)$ième a une valeur absolue constante.

THÉORÈME. *La solution du problème extrêmal de Favard est unique. Elle est réalisée par une spline parfaite dont la dérivée $m + 1$ième a pour valeur absolue*:

$$\frac{1}{b - a}\,))\pi(\dot{P})((^m_{a,b}\, .$$

Démonstration. L'hyperplan

$$H = \{\mathbf{L} \in (W^m\{a, b\})' \mid \langle \mathbf{L}, P_b - P_a \rangle =))\pi(\dot{P})((^m_{a,b}$$

contient $\mathbf{L}_0$ et si $\mathbf{L} \in H$ on a: $\langle \mathbf{L}/\|\, \mathbf{L} \,\|_{a,b}\,, P_b - P_a \rangle \leqslant \langle \mathbf{L}_0\,, P_b - P_a \rangle$ et donc $\|\, \mathbf{L} \,\|_{ab} \geqslant 1$ ainsi H est un hyperplan d'appui.

Le lemme précédent montre qu'il existe une fonction $\psi \in L^\infty[a, b]$ telle que $\|\, \psi \,\|_{L^\infty[a,b]} = 1$ et que $\forall \mathbf{L} \in H$ on ait:

$$\langle \mathbf{L}, P_b - P_a \rangle = \int_a^b \tilde{L}(t)\, \psi(t)\, \frac{))\pi(\dot{P})((^m_{a,b}}{b - a}\, dt. \tag{12}$$

Mais comme l'hyperplan H ne contient pas l'origine, (12) est vérifiée pour toute forme linéaire sur $W^m\{a, b\}$.

La fonction $f \in C_\infty{}^m[a, b]$ définie par:

$$f(x) = P_a(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} \psi(t) \frac{))\pi(\dot{P})((^m_{a,b}}{b-a}\, dt$$

est une spline parfaite de degré m, de dérivée $m+1$-ième constante en valeur absolue, ayant au plus m discontinuités (aux zéros du polynôme $\tilde{L}_0(t)$) et telle que:

$$\| f^{(m+1)} \|_{L^\infty[a,b]} = \frac{1}{b-a}))\pi(\dot{P})((^m_{a,b}$$

donc réalisant l'égalité (10). Enfin $T_a f(x) = P_a(x)$ et si $k = 0, 1,\dots, m$:

$$f^{(k)}(b) = P_a^{(k)}(b) + \int_a^b \frac{(b-t)^{m-k}}{(m-k)!} f^{(m+1)}(t)\, dt$$

ce qui peut s'écrire en utilisant (12):

$$f^{(k)}(b) = P_a^{(k)}(b) + (-1)^{m-k} \times (-1)^{m-k} [P_b^{(k)}(b) - P_a^{(k)}(b)] = P_b^{(k)}(b).$$

Remarque. Il résulte de cette analyse que si deux polynômes L_1 et L_2 ont les mêmes zéros avec des ordres de même parité dans $[a, b]$ et si $\| \tilde{L}_1 \|_{L_1} = \| \tilde{L}_2 \|_{L_1} = | a - b |$, ils sont situés dans une même facette de la boule unité du dual de $\tilde{W}^m\{a, b\}$.

Application. M. Louboutin [7] a traité l'exemple suivant permettant de construire une *partition de l'unité optimale* constituée de fonctions $f_i \in C_\infty{}^n[R]$ telles que: si (a_i) désigne une suite de points de $\mathbb{R}$ (croissante)

$$\sup f_i \subset [a_{i-1}, a_{i+1}],$$

$$f_i(a_i) = 1,$$

$$f_i^{(k)}(a_i) = 0 \qquad \text{pour} \quad k = 1,\dots, n,$$

$$\| f_i^{(n+1)} \|_{L^\infty[a_{i-1}, a_{i+1}]} \text{ est minimale.}$$

Pour cela il utilise le théorème précédent et un théorème de Zolotareff qui permettent de montrer que la fonction $f \in C_\infty{}^n[a, b]$ telle que: $f(a) = 1$, $f(b) = 0$, $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0$ pour $i = 1,\dots, n$ et telle que $\| f^{(n+1)} \|_{L^\infty[a,b]}$ soit minimum est donnée par:

$$f(x) = 1 - \int_a^x (t-x)^n \frac{4^n}{(b-a)^{n+1}} \operatorname{sign} \overline{T}'_{n+1}(t)\, dt \quad \text{où } \overline{T}'_{n+1}$$

désigne la dérivée du polynôme de Tchebichef de degré $n + 1$ rapporté à l'intervalle $[a, b]$, avec:

$$\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty[a,b]} = \frac{4^n \times n!}{(b-a)^{n+1}}.$$

Signalons que Louboutin a deviné la constante $4^n \times n!$ par calculs sur ordinateur plusieurs mois avant de trouver une démonstration.

4. Le problème d'interpolation extrémale de Schoenberg

Tout ce qui vient d'être dit se transpose à l'espace des fonctions de classe C^m dont la dérivée $m+1$ième appartient à $\mathbb{L}_p$.

Dans le cas $p = 2$, on trouve un résultat de Schoenberg (dans le cas particulier des nœuds confondus en a et b).

Théorème. *La solution du problème de Schoenberg est unique: c'est le polynôme d'interpolation au sens de Hermite.*

Indiquons simplement que le rôle de la fonction ψ est joué ici par le polynôme L_0 lui-même

$$\left(\int_a^b |\tilde{L}_0|^2 \, dt = \int_a^b \tilde{L}_0(t)\, \tilde{L}_0(t)\, dt\right).$$

La boule unité du dual de $W^m\{a, b\}$ muni de la norme déduite de $\mathbb{L}_2$ sur les polynômes est plus simple que dans le cas de Favard. Cette boule n'est pas seulement lisse, mais chaque facette est réduite à un point: en fait c'est un ellipsoide, dont les axes correspondent aux polynômes de Legendre.

5. Prolongement extrémal des champs tayloriens

Soit $\mathbb{F}$ un compact de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ l'enveloppe convexe de $\mathbb{F}$.

Définition. On appelle prolongement extrémal d'un champ $\dot{P} \in W^m\{\mathbb{F}\}$ une fonction $\hat{P}$ qui prend la valeur $\hat{P}(a) = P_a(a)$ en tout point de $\mathbb{F}$ et dont la restriction à tout intervalle contigu à $\mathbb{F}$ (c'est-à-dire tel que: $[a, b] \cap \mathbb{F} = \{a, b\}$) est la spline parfaite réalisant le prolongement extrémal du champ $\{P_a, P_b\}$ entre a et b.

Posons: $\|\dot{P}\|^m_{\mathbb{F}} = \sup_{a,b\in\mathbb{F}} \|\dot{P}\|^m_{a,b}$ où le second membre est calculé comme au paragraphe III à partir de l'image de $\dot{P}$ dans $\tilde{W}^m\{a, b\}$.

THÉORÈME. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ $\dot{P}$ soit taylorien est qu'il existe un mobule de continuité $\omega(x)$ tel que $a, b \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ on ait: si $a < b$*

$$))\dot{P}((^{m}_{a,b} \leqslant \omega(b - a). \tag{13}$$

Le prolongement extrémal $\hat{P}$ vérifie alors:

$$))\hat{P}((^{m}_{\mathbb{K}} \leqslant 3(m + 1)^2))\dot{P}((^{m}_{\mathbb{F}} \tag{14}$$

et $\hat{P}$ abmet un m-module de continuité égal à $3(m + 1)^2\omega(x/3)$.

Démonstration. La condition énoncée est nécessaire car si g est un prolongement $\in C_\infty{}^m(\mathbb{K})$ on a: $))\dot{P}((^{m}_{a,b} \leqslant (b - a) \| g^{(m+1)}\|_{L^\infty[a,b]}$ et donc $\omega(x) = x . \| g^{(m+1)}\|_{L^\infty[0,x]}$ convient.

Elle est suffisante car plus fine que les conditions (W_k) du théorème de Whitney: la relation (13) s'écrit: $|\langle \mathbf{L}, P_b - P_a \rangle| < \| \mathbf{L} \|_{a,b}\, \omega(b - a)$. En choisissant alors $\mathbf{L}$ associé au polynôme $\tilde{L}(t) = (b - t)^{m-k}/(m - k)!$ et en utilisant la relation (6) on trouve:

$$| P_b^{(k)}(b) - P_a^{(k)}(b)| \leqslant (b - a)^{m-k}\, \omega(b - a).$$

Pour établir le théorème on utilisera les lemmes suivants.

LEMME 1. *Pour tout polynôme $P \in \mathscr{P}^m(\mathbb{R})$ on a:*

$$\max_{t\in[a,b]} | P(t)| \leqslant \frac{(m + 1)^2}{b - a} \int_a^b | P(t)| \, dt$$

(*cf. aussi* [8]).

Démonstration. Il suffit de l'établir pour $a = -1$, $b = 1$.

Soient P_1, $P_1 \cdots P_n$ les polynômes de Legendre relatifs à l'intervalle $[-1, +1]$ tels que: $P_k(1) = 1$. Alors: $\max_{t\in[-1,1]} | P_k(t)| = 1$ pour $k = 0, 1, \ldots$.

Le noyau $K(x, y) = \sum_{k=0}^m (2k + 1)/2 \cdot P_k(x)\, P_k(y)$ vérifie: pour tout $P \in \mathscr{P}^m(R)$

$$P(x) = \int_{-1}^{1} K(x, y)\, P(y)\, dy$$

et donc:

$$\max_{x\in[-1,1]} | P(x)| \leqslant \max_{x,y\in[-1,1]} | K(x, y)| \int_{-1}^{1} | P(t)| \, dt$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} (2k + 1)/2 = (m + 1)^2/2.$$

Lemme 2. *Soient $a < x < y < b$ des réels et un champ taylorien $\dot P \in W^m\{a, x, y, b\}$. Alors on a*:

$$)\!)\dot P(\!(^m_{a,b} \leqslant (m+1)^2 \{)\!)\dot P(\!(^m_{a,x} +)\!)\dot P(\!(^m_{x,y} +)\!)\dot P(\!(^m_{y,b}\}.$$

Démonstration. Soit g le prolongement extrémal du champ $\dot P$: c'est une fonction spline telle que $|g^{(m+1)}(t)|$ soit constante dans chacun des intervalles $[a, x]$, $[x, y]$ et $[y, b]$ et ait pour valeur respective dans chacun d'eux:

$$\frac{1}{x-a})\!)\dot P(\!(^m_{a,x}, \quad \frac{1}{y-x})\!)\dot P(\!(^m_{x,y} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b-y})\!)\dot P(\!(^m_{y,b}$$

donc

$$\int_a^b |g^{(m+1)}(t)|\, dt =)\!)\dot P(\!(^m_{a,x} +)\!)\dot P(\!(^m_{x,y} +)\!)\dot P(\!(^m_{y,b}.$$

Mais g réalise un prolongement (non nécessairement extrémal) du champ $\{P_a, P_b\}$ et donc d'après (7) il existe un polynôme $\tilde L_0(t)$ et que $\|\tilde L_0(t)\|_{L^1[a,b]} = 1$ et que

$$)\!)\dot P(\!(^m_{a,b} = \int_a^b \tilde L_0(t)\, g^{(m+1)}(t)\, dt.$$

Le lemme 1 et l'inégalité de Hölder conduisent au résultat.

Lemme 3. *Soit $\hat f$ la spline parfaite qui réalise le prolongement extrémal d'un champ $\dot P \in W^m\{a, b\}$ et soient x et y deux points tels que*: $a \leqslant x < y \leqslant b$. *Soit $\dot f$ le champ taylorien $\in W^m\{a, x, y, b\}$ induit par $\hat f$. Alors*:

$$\frac{1}{y-x})\!)\dot f(\!(^m_{x,y} = \frac{1}{b-a})\!)\dot f(\!(^m_{a,b} = \frac{1}{b-a})\!)\dot P(\!(^m_{a,b}$$

et

$$)\!)\dot f(\!(^m_{x,y} \leqslant \omega(y-x).$$

Démonstration. Soit $\hat g$ le prolongement extrémal du champ $\dot f \in W^m\{a, x, y, b\}$ alors $\hat f = \hat g$ en effet

$$\|\hat g^{(m+1)}\|_{L^\infty[a,x]} \leqslant \|\hat f^{(m+1)}\|_{L^\infty[a,x]}$$

et des inégalités analogues dans $[x, y]$ et $[y, b]$ donc:

$$\|\hat g^{(m+1)}\|_{L^\infty[a,b]} \leqslant \|\hat f^{(m+1)}\|_{L^\infty[a,b]}$$

et donc par définition de $\hat f$ on a $\hat f = \hat g$.

Or

$$|||\hat{f}|||^m_{x,y} = (y - x)\, \| \hat{f}^{(m+1)} \|_{L^\infty[x,y]}$$

et

$$|||\hat{f}|||^m_{a,b} = (b - a)\, \| \hat{f}^{(m+1)} \|_{L^\infty[a,b]}$$

mais $|\hat{f}^{(m+1)}(t)|$ est constant dans $[a, b]$ et donc on a l'égalité annoncée. L'inégalité (13) permet alors d'écrire:

$$|||\hat{f}|||^m_{x,y} \leqslant \frac{y - x}{b - a}\, \omega(b - a)$$

et comme ω est un module de continuité concave, $\omega(t)/t$ est décroissant, ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème. Soient x et y deux points distincts de $\mathbb{K}$. Il existe 4 points a, b, c, d, de $\mathbb{F}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b \leqslant c \leqslant y \leqslant d$ et que, si $x \notin \mathbb{F}$ (resp. $y \notin \mathbb{F}$), $[a, b]$ (resp. $[c, d]$) soit un intervalle contigu à $\mathbb{F}$.
Le lemme 3 entraîne:

$$|||\hat{P}|||^m_{x,b} \leqslant |||\hat{P}|||^m_{a,b} \leqslant |||\hat{P}|||^m_{\mathbb{F}}$$

et les inégalités analogues; utilisant le lemme 2 on trouve:

$$|||\hat{P}|||^m_{x,y} \leqslant (m + 1)^2 \{|||\hat{P}|||^m_{x,b} + |||\hat{P}|||^m_{b,c} + |||\hat{P}|||^m_{c,y}\} \leqslant 3(m + 1)^2\, |||\hat{P}|||^m_{\mathbb{F}}$$

qui est l'inégalité (14).

De même le lemme 2 permet d'écrire:

$$\begin{aligned} |||\hat{P}|||^m_{x,y} &\leqslant (m + 1)^2\, [\omega(b - x) + \omega(c - b) + \omega(y - c)] \\ &\leqslant 3(m + 1)^2\, \omega\left(\frac{y - x}{3}\right) \end{aligned}$$

puisque ω est concave.

Si $\hat{g}$ désigne un prolongement quelconque de classe C^{m+1} du champ $\{P_x, P_y\} \in W^m\{x, y\}$ on a:

$$\hat{P}^{(m)}(y) - \hat{P}^{(m)}(x) = \hat{g}^{(m)}(y) - \hat{g}^{(m)}(x) = \int_x^y \hat{g}^{(m+1)}(t)\, dt$$

Mais

$$\int_x^y \hat{g}^{(m+1)}(t)\, dt = \langle \mathbf{L}, P_y - P_x \rangle$$

pour la fonctionelle **L** associée à $\tilde{L}(t) = 1$ et donc par définition des normes utilisées:

$$\left| \int_x^y \hat{g}^{(m+1)}(t)\, dt \right| \leqslant))\hat{P}((^m_{x,y}$$

soit

$$| \hat{P}^{(m)}(y) - \hat{P}^{(m)}(x)| \leqslant))\hat{P}((^m_{x,y} \leqslant 3(m+1)^2\, \omega \left(\frac{y-x}{3}\right).$$

Remarque. Lorsque le module de continuité de (13) est linéaire (i.e., $\omega(t) = Ct$ où C est une constante) on a le résultat plus fort suivant: le prolongement extrémal $\hat{P}$ satisfait à

$$))\hat{P}((^m_{x,y} \leqslant C\,|x-y| \qquad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}. \tag{15}$$

En effet, si x, y, a, b, c, d sont des points disposés comme la démonstration du théorème précédent, le lemme 3 entraîne que:

$$\frac{1}{b-x}\,))\hat{P}((^m_{x,b} \leqslant C \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{b-y}\,))\hat{P}((^m_{c,y} \leqslant C.$$

De plus on a:

$$\frac{1}{y-x}\,))\hat{P}((^m_{x,y} \leqslant \max \left\{ \frac{1}{b-x}\,))\hat{P}((^m_{x,b}\,;\ \frac{1}{c-b}\,))\hat{P}((^m_{b,c}\,;\ \frac{1}{y-c}\,))\hat{P}((^m_{c,y} \right\}$$

car le second membre représente $\| g^{(m+1)} \|_{L^\infty[x,y]}$ où g est le prolongement extrêmal du champ induit par $\hat{P}$ sur $\{x, b, c, y\}$, ce qui permet de conclure grâce à (10). Le second membre de l'inégalité précédente est majoré par C, ce qui entraîne (15). Ainsi dans ce cas particulier la majoration du m-module de continuité du prolongement ne fait pas intervenir la constante $3(m+1)^2$.

Théorème. *Si le module de continuité de* (13) *est linéaire* ($i \cdot e\ \omega(t) = Ct$ *où C est constant*), *le prolongement extrémal $\hat{P}$ satisfait à* (15)

$$))\hat{P}((^m_{x,y} \leqslant C\,|x-y| \qquad \textit{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}.$$

Soient x, y, a, b, c, d des points disposés comme dans la démonstration du théorème précédent. Le lemme 3 entraîne que

$$\frac{1}{b-x}\,))\hat{P}((^m_{x,b} \leqslant C, \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{y-c}\,))\hat{P}((^m_{c,y} \leqslant C.$$

De plus, on a:

$$\frac{1}{y-x}\,))\hat{P}((^m_{x,y} \leqslant \max \left\{ \frac{1}{b-x}\,))\hat{P}((^m_{x,b}\,;\ \frac{1}{c-b}\,))\hat{P}((^m_{b,c}\,;\ \frac{1}{y-c}\,))\hat{P}((^m_{c,y} \right\}.$$

Car le second membre représente $\| g^{m+1} \|_{L^\infty[x,y]}$ où g est le prolongement extrémal du champ induit par P sur $\{x, b, c, y\}$ ce qui permet de conclure, grâce à (10). Le second membre de l'inégalité est majoré par C ce qui entraîne (15). Ainsi, dans ce cas particulier, la majoration du m-module de continuité du prolongement ne fait pas intervenir la constante $3(m + 1)^2$.

Reconnaissance

Ce travail a été accompli en 1966, sous le contrat D.G.R.S.T. No. 65–FR 206. Une première version est parue sous forme de polycopié dans "Le prolongateur de Whitney" Rennes 1966, a été entièrement réécrite par M^{elle} A. Scherpereel. Je lui dois, en particulier une nouvelle démonstration du lemme 1, avec une meilleure constante.

Bibliographie

1. C. Coatmelec, Approximation et interpolation des fonctions différentielles de plusieurs variables, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **83** (1966), 271–341.
2. J. Favard, Sur l'interpolation, *J. Math. Pures Appl.* **19** (1940), 281–306.
3. G. Glaeser, Étude de quelques algèbres tayloriennes, *J. Analyse Math.* **6** (1958), 1–124.
4. G. Glaeser, L'usage heuristique des ordinateurs en Mathématiques pures, *in* "Computer and Mathematical Research" (Churchhouse and Herz, Eds.), pp. 89–96, North Holland, Amsterdam, 1968.
5. G. Glaeser, Problèmes généraux de prolongement des fonctions dérivables Géométrie des distributions à support fini, Seminaire Goulaouic–Schwartz École Polytechnique, Paris, 1970–1971, Exposés 15 et 16.
6. R. Louboutin, Étude expériementale du théorème de prolongement de Whitney, Thèse de doctorat de 3ème cycle "Le prolongateur de Whitney," tome 1, miméographie, Rennes, 1966.
7. R. Louboutin, Sur une bonne partition de l'unité, *in* "Le prolongateur de Whitney," tome 2, miméographie, Rennes, 1967.
8. R. Louboutin, Inégalité entre les normes L^1 et L^∞ sur l'espace des polynômes, *in* "Le prolongateur de Whitney," tome 2, miméographie, Rennes, 1967.
9. I. Schoenberg, On interpolation by spline functions and its minimal properties, *in* "Proceedings of a Symposium on Approximation Theory," (P. L. Butzer and J. Korevaar, Eds.), pp. 109–129, Birkhauser, Basel, 1964.
10. H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Transl. Amer. Math. Soc.* **36** (1934), 63–89.